Witwiński, O podstawowych własnościach krzywych wymiernych 1916



# O PODSTAWOWYCH WŁASNOŚCIACH

# KRZYWYCH WYMIERNYCH.

Napisał

ROMUALD WITWIŃSKI.

WARSZAWA
WYDAWNICTWO REDAKCYI
*WIADOMOŚCI MATEMATYCZNYCH.*

1916.

Osobne odbicie z tomu XXI-go

„WIADOMOŚCI MATEMATYCZNYCH".



Geprüft und freigegeben durch die Kais. Deutsche Presseabteilung
Warschau, den 22 VIII. 1916. T. № 2371. Dr. № 139.

Drukarnia Rubieszewskiego i Wrotnowskiego w Warszawie.






ROMUALD WITWIŃSKI.

# O podstawowych własnościach krzywych wymiernych.

---

1. Znaczna liczba przekształceń geometrycznych, najbardziej zwykłych, jako to przekształcenia, dające krzywe inwersyjne, spodkowe, rozwinięte, przekształcają, jak wiadomo, krzywe wymierne na krzywe wymierne. Linia prosta i stożkowe są to najprostsze przykłady tego rodzaju krzywych.

W pracy niniejszej zamierzam zbadać własności podstawowe krzywych wymiernych nie tylko zupełnie niezależnie od teoryi ogólnej krzywych algebraicznych, lecz, przeciwnie, — przedstawić te własności, jako wstęp do tej teoryi [1].

Metoda, którą stosuję, daje się z łatwością rozciągnąć na krzywe wymierne przestrzeni o dowolnej liczbie wymiarów.

Ograniczę się do wykazania własności krzywych płaskich trzeciego i czwartego rzędu, co w zupełności wystarczy dla przedstawienia punktów podstawowych teoryi. Zastosuję tutaj spółrzędne niejednorodne i założę, że krzywa jest dana przez równania kształtu

$$x = \frac{f_1(t)}{f_3(t)}, \qquad y = \frac{f_2(t)}{f_3(t)}, \tag{I}$$

---

[1]) Próbę w tym kierunku poczynił był już matematyk angielski Tweedie, który w notatce p. t. „Sur la génération des courbes unicursales“ (l'Enseignement mathématique t. 13) rozważał przypadek szczególny tworzenia się krzywej sześciennej jednobieżnej, który znajdzie czytelnik w mojej pracy.

gdzie $f_k(t) = a_k t^n + b_k t^{n-1} + \ldots + l_k$, $t$ zaś jest to parametr zmienny; przytem różne funkcye $f$ nie mają czynnika wspólnego.

Krzywa ta przecina prostą

$$Ax + By + C = 0$$

w $n$ punktach, dla których parametr $t$ czyni zadość równaniu

$$Af_1(t) + Bf_2(t) + Cf_3(t) = 0.$$

Krzywa wymierna jest więc naogół krzywą rzędu $n$-tego. Przypadki, stanowiące wyjątek, będą rozpatrzone dalej.

**2. Linia prosta.** Prosta jest przedstawiona przez równania

$$x = \frac{a_1 t + b_1}{a_3 t + b_3}, \qquad y = \frac{a_2 t + b_2}{a_3 t + b_3}.$$

Niemiecki matematyk Brill spostrzegł (Math. Annalen, t. 12), że, gdy założymy w równaniach (I) $n = 2$ i rozpatrywać będziemy przypadek stożkowej zniekształconej, ta ostatnia rozpada się na prostą, poprowadzoną dwa razy. Rezultat ten można uogólnić, szukając, w jakich przypadkach równania (I) przedstawiają prostą.

Załóżmy, że prosta jest wyrażona w spółrzędnych prostokątnych $x$, $y$ przez równanie

$$Ax + By + C = 0.$$

Będziemy mieli wtedy następującą tożsamość względem $t$:

$$Af_1(t) + Bf_2(t) + Cf_3(t) \equiv 0,$$

skąd dla wyznaczników, utworzonych z elementów,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 \ldots & l_2 \\ a_3 & b_3 \ldots & l_3 \end{vmatrix}$$

otrzymujemy wartość, równą zeru.

Twierdzenie odwrotne jest prawdziwe; warunki zatem są konieczne i dostateczne.

W tem odwzorowaniu każdemu punktowi na linii odpowiada

$n$ wartości parametru $t$, i krzywą (zniekształconą) stanowi linia prosta, poprowadzona $n$ razy.

**3.** Łatwo jest zdać sobie sprawę z tego, że krzywa, przedstawiona przez równania (I), nie może zniekształcać się na dwie krzywe algebraiczne, nie pokrywające się wzajemnie,

$$\Phi(x, y) = 0 \quad \text{i} \quad \Psi(x, y) = 0.$$

W rzeczy samej, równania te mogłyby wtenczas być wyprowadzone z równań (I), zapomocą eliminacyi algebraicznej parametru $t$, co z koniecznością prowadziłoby do przyjęcia, że te równania zosobna spełniają się dla nieskończonej liczby wartości wspólnych parametru $t$, — innemi słowy, — że te równania posiadają nieskończoną liczbę punktów wspólnych; hypoteza jest możliwa tylko dla krzywych $\Phi = 0$ i $\Psi = 0$, pokrywających się wzajemnie.

Stąd wnosimy, że krzywa, o ile jest zniekształcona, jest rzędu $m$-tego, przyczem $m$ jest czynnikiem liczby $n$, i ta krzywa jest jedyna

W dalszym ciągu będę zakładał, że równania (I) przedstawiają krzywą rzędu $n$-tego.

**4.** **Stożkowe.** Kładąc

$$f_k(t) = a_k t^2 + b_k t + c_k, \tag{2}$$

pytamy, czy możliwa jest następująca tożsamość względem $t$:

$$\Sigma (p_k t + q_k) f_k(t) = 0? \tag{3}$$

Warunek możliwości jest równoważny czterem związkom liniowym jednorodnym pomiędzy sześcioma ilościami

$$(p_1, \; q_1; \; p_2, \; q_2; \; p_3, \; q_3).$$

Tożsamość zatem jest możliwa, i jeżeli

$$(p_1, \; q_1 \ldots), \quad (p_1', \; q_1' \ldots)$$

są dwa układy rozwiązań, wówczas inne układy są wyznaczone przez kombinacye liniowe dwóch pierwszych.

W ten sposób dochodzimy do dwóch tożsamości:

$$L+tM=0, \qquad L'+tM'=0, \tag{4}$$

gdzie:

$$L=q_1x+q_2y+q_3,$$

$$M=p_1x+p_2y+p_3; \quad \text{i t. d.}$$

(Równanie stożkowej, względem $x$, $y$, jest więc $LM'-L'M=0$).

Stąd bezpośrednio wynika własność rzutowa stożkowej, jako miejsca przecięcia promieni odpowiadających dwóch pęków rzutowych prostych. Parametr $t$ ma również prostą interpretacyę geometryczną.

Można byłoby także zastąpić dwa układy rozwiązań

$$(p_1, \ldots) \quad \text{i} \quad (p_1' \ldots)$$

dwoma innemi, utworzonemi z kombinacyj liniowych dwóch pierwszych; ale pęki, w ten sposób otrzymane, byłyby wówczas zupełnie identyczne z poprzedniemi, i nie otrzymalibyśmy żadnego rezultatu nowego.

**5. Krzywe sześcienne.** Weźmy tu

$$f_k(t)=a_kt^3+\ldots+d_k. \tag{5}$$

W tym przypadku, założenie

$$\Sigma(p_kt+q_k)f_k(t)\equiv 0 \tag{6}$$

wyznacza pięć związków jednorodnych pomiędzy sześcioma ilościami

$$p_1, \ldots, q_3;$$

ich stosunki posiadają wówczas jedno i tylko jedno rozwiązanie niezależne.

Istnieje wobec tego zależność

$$L+tM=0, \tag{7}$$

w której

$$L=q_1x+q_2y+q_3,$$

$$M=p_1x+p_2y+p_3.$$

Założenie

$$\Sigma(p_kt^2+q_kt+r_q)f_k(t)\equiv 0$$

wyznaczyłoby sześć równań pomiędzy dziewięcioma ilościami

$$p_1, \ldots, r_3.$$

Mamy zatem trzy układy rozwiązań niezależnych i, prócz nich, inne układy, które są kombinacyami liniowemi pierwszych układów. Możemy wziąć dla dwóch z tych układów wartości

$$0,\ p_1,\ q_1;\ 0,\ p_2,\ q_2;\quad \text{i t. d.}$$

i

$$p_1,\ q_1,\ 0;\ p_2,\ q_2,\ 0;\quad \text{i t. d.,}$$

dane przez równości

$$L+tM=0 \quad \text{i} \quad Lt+Mt^2=0.$$

Załóżmy, że układ $p_1'$, $q_1'$, $r_1'$, i t. d. jest trzecim układem rozwiązań, któremu odpowiada tożsamość

$$L'+M't+N't^2=0, \tag{8}$$

w której

$$L'=r_1'x+r_2'y+r_3'; \quad \text{i t. d.}$$

Ponieważ równość (8) przedstawia styczną do stożkowej

$$M'^2-4L'N'=0,$$

wnosimy stąd:

Krzywa sześcienna może być uważana, jako krzywa, utworzona przez punkt wspólny równaniom

$$L+tM=0, \tag{9}$$

$$L'+M't+N't^2=0. \tag{10}$$

Wreszcie — twierdzenie:

Krzywa sześcienna wymierna może być uważana jako miejsce przecięcia promieni pęku ze stycznemi do stożkowej (Tweedie, loc. cit.).

Albo jeszcze:

Dane są dwa szeregi punktowe i pęk prostych w odpowiedniości rzutowej: prosta, łącząca punkty odpowiadające dwóch szeregów, przecina promień odpowiadający pęku w punkcie, którego miejscem jest krzywa sześcienna wymierna.

**6.** Punkt podwójny odpowiada przypadkom

$$L=0, \quad M=0,$$

czyli równanie

$$L + tM = 0$$

nie byłoby spełnione dla dwóch wartości parametru $t$, co jest warunkiem koniecznym dla punktu podwójnego.

Punkt podwójny jest więc wierzchołkiem pęku prostych, wyznaczonym przez równość (9).

Równanie krzywej sześciennej, względem $x$ i $y$, otrzymujemy przez eliminacyę parametru $t$ z równań (9) i (10).

Dwóm stycznym do stożkowej, obwodzonej przez (10), odpowiadają proste pęku stycznych do krzywej sześciennej, przechodzącej przez punkt podwójny. W ten sposób punkt podwójny, z dwiema gałęziami rzeczywistemi, jest to punkt zwrotu, albo też punkt sprzężony, w zależności od tego, czy jest wzięty zewnątrz stożkowej, na stożkowej, albo wewnątrz stożkowej.

**7.** Gdy stożkowa, obwiedziona przez (10), przecina krzywą sześcienną, wówczas jest do niej styczna. Stożkowa ta ma więc naogół trzy punkty styczności z krzywą sześcienną.

Własność styczności może być udowodniona analitycznie w sposób następujący.

Załóżmy, że krzywa jest utworzona przez punkt, czyniący zadość równaniom

$$\Phi(t) \equiv Ax + By + C = 0, \tag{11}$$

$$\Psi(t) \equiv A'x + B'y + C' = 0, \tag{12}$$

w których spółczynniki są to funkcye parametru $t$, którego zmiany wyznaczają krzywą

Niech będzie $P$ punkt jakikolwiek $(x_0, y_0)$ na krzywej, odpowiadającej parametrowi $t = t_0$ i przedstawionej przez równania $\Phi = 0$, $\Psi = 0$.

Styczna w punkcie $P$ do krzywej jest dana ogólnie przez równanie

$$\begin{vmatrix} \Phi & \Psi \\ \Phi_0' & \Psi_0' \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

gdzie $\Phi_0'$ jest wartością stosunku $\frac{d\Phi}{dt}$ przy $x = x_0$, $y = y_0$, $t = t_0$.

Obwiednię krzywej $\Phi = 0$ otrzymamy, eliminując parametr $t$ z równań

$$\Phi = 0 \quad \text{i} \quad \Phi' = 0.$$

Dla punktu wspólnego krzywej i obwiedni linii (11), równanie (13) sprowadza się do równania $\Phi = 0$; dwie krzywe mają więc jedną styczną wspólną. Ta sama własność pozostaje prawdziwą dla wszystkich punktów, wspólnych krzywej i obwiedni równania (12).

**8.** Inne rozwiązania równania

$$\Sigma (p_k t^2 + q_k t + r_k) f_k(t) \equiv 0$$

dają:

$$L + t M = 0$$

$$L' + M' t + N' t^2 + (A t + B)(L + t M) = 0,$$

gdzie $A$ i $B$ są stałe, dowolnie obrane. Można zachować ten sam pęk i zastąpić stożkową-obwiednię przez nieskończoną liczbę innych stożkowych [1].

**9. Krzywe rzędu czwartego.** Połóżmy

$$f_k = a_k t^4 + \ldots + e_k;$$

wówczas tożsamość

$$\Sigma (p_k t + q_k) f_k(t) \equiv 0$$

jest naogół niemożliwa. Powrócimy do tego przypadku nieco dalej

Jeżeli założymy

$$\Sigma (p_k t^2 + q_k t + r_q) f_k(t) \equiv 0,$$

wówczas z siedmiu równań, pomiędzy dziewięcioma ilościami, które z nich wynikają, wyprowadzimy dwie zależności w postaci:

---

[1]) Łatwo jest udowodnić, że, jeżeli punkty krzywej szcześciennej, odpowiadającej wartościom $t_1$, $t_2$, $t_3$, są położone na jednej linii prostej, wówczas ma miejsce związek

$$F(t_1, t_2, t_3) \equiv A t_1 t_2 t_3 + B \Sigma t_1 t_2 + C \Sigma t_1 + D = 0,$$

w którym $A$, $B$, $C$, $D$ są wielkości stałe.

Jeżeli $t = t_1$ jest punktem przegięcia, wówczas jest to pierwiastek równania

$$A t^3 + 3 B t^2 + 3 C t + D = 0. \qquad \text{(X)}$$

Istnieją więc trzy punkty przegięcia i, jeżeli $i_1$, $i_2$, $i_3$ są pierwiastkami równania (X), wówczas $F(i_1, i_2, i_3) = 0$, tak że trzy punkty przegięcia leżą na linii prostej.

$$t^2 L + 2tM + N = 0, \tag{14}$$

$$t^2 L' + 2tM' + N' = 0. \tag{15}$$

Każda inna zależność może być sprowadzona do następującej:

$$t^2 (L + AL') + 2t(M + AM') + N + AN' = 0; \tag{16}$$

gdzie $A$ jest wielkość stała.

(Dwa równania tej formy mogą oczywiście zastąpić równania (14) i (15)).

Otóż dwa równania (14) i (15) przedstawiają styczne do stożkowych

$$M^2 - LN = 0; \quad M'^2 - L'N' = 0.$$

Możemy więc wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Krzywa wymierna czwartego rzędu może być naogół utworzona przez przecięcie stycznych do dwóch stożkowych, będących w zależności homograficznej jedna z drugą.

Albo jeszcze: Dane są cztery szeregi homograficzne punktów: prosta, łącząca dwa punkty odpowiadające dwóch z tych szeregów, przecina odpowiadającą linię prostą, łączącą punkty dwóch innych szeregów, w punkcie, którego miejscem jest krzywa wymierna czwartego rzędu.

**10. Punkty podwójne.** Dla punktu zwyczajnego $(x, y)$ krzywej, równania (14) i (15) posiadają jeden pierwiastek wspólny względem $t$; dla punktu podwójnego dwa pierwiastki względem $t$ są wspólne. Stąd, dla punktu podwójnego, otrzymujemy zależności:

$$\frac{L}{L'} = \frac{M}{M'} = \frac{N}{N'}.$$

Jeżeli przez $\rho$ oznaczymy stosunek wspólny, wówczas eliminacya zmiennych $x$ i $y$ da nam krzywą sześcienną względem $\rho$. Istnieją zatem naogół trzy punkty podwójne.

Równanie zwykłe krzywej czwartego rzędu w funkcyi spółrzędnych $x$ i $y$ otrzymamy, eliminując parametr $t$ z równań (14) i (15):

$$4(MN' - M'N)(LM' - L'M) = (NL' - N'L)^2,$$

albo jeszcze

$$C_1 C_2 = C_3^2,$$

gdzie $C_1$, $C_2$, $C_3$ są to trzy stożkowe, przechodzące przez trzy punkty wspólne (punkty podwójne krzywej czwartego rzędu).

W ten sposób dochodzimy do innego znanego tworzenia się krzywej, — jako przecięcia

$$C_1 - \lambda C_3 = 0 \quad \text{i} \quad \lambda C_2 - C_3 = 0,$$

gdzie $\lambda$ jest wielkość dowolna.

**11.** Wiemy już, na mocy § 7, że każda stożkowa

$$M^2 - LN = 0, \qquad M'^2 - L'N' = 0$$

przecina krzywą rzędu czwartego w czterech punktach. Prócz tego, znajdujemy tutaj własność następującą.

Styczne tworzące (14) i (15) mogą być zastąpione przez dwie inne z układu (16), dla których stożkowa obwiednia jest dana przez równanie

$$(M + A M')^2 - (L + A L')(N + A N') = 0,$$

które można przedstawić w postaci:

$$M^2 - LN + A(2MM' - LN' - L'N) + A^2 (M'^2 - L'N') = 0 \quad (18)$$

Zmiany spółczynnika $A$ w równaniu (18) wyznaczają układ stożkowych, których obwiednią jest ta sama krzywa rzędu czwartego.

**12.** Wróćmy do przypadku

$$\Sigma (p_k t + q_k) f_k = 0. \quad (17)$$

Tożsamość ta jest naogół niemożliwa; warunek możliwości wyraża się zapomocą równania

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ . & . & . & . & . & . \\ e_1 & e_2 & e_3 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 & e_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Istnieją dwa rozwiązania równania

$$\Sigma (p_k t^2 + q_k t + r_k) f_k = 0,$$

odpowiadające tożsamości (17), pomnożonej przez $At + B$, i niezależne od siebie.

Istnieją cztery rozwiązania, liniowo niezależne, równości

$$\Sigma (p_k t^3 + \ldots) f_k = 0.$$

Trzy z tych ostatnich rozwiązań są dane przez tożsamość (17), pomnożoną przez

$$At^2 + Bt + C.$$

Rozwiązanie czwarte daje tożsamość

$$L' t^3 + M' t^2 + N' t + P' = 0.$$

Mamy w ten sposób dla tworzących równania:

$$\left.\begin{aligned} Lt + M = 0, \\ L' t^3 + M' t^2 + N' t + P' = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Eliminacya parametru $t$ z tych równań wyznacza krzywą czwartego rzędu, mającą jeden punkt potrójny w wierzchołku pęku linij, dany przez równania

$$L = 0; \qquad M = 0.$$

**13.** Możemy teraz wypowiedzieć własności, dotyczące krzywych rzędów wyższych, nie uciekając się do nowego dowodu, ponieważ rozważania, które do tych własności prowadzą, są już dostatecznie wyżej wyświetlone.

**Twierdzenie.** Krzywa wymierna $C$ rzędu $n$-tego może być utworzona przez przecięcie stycznych odpowiadających dwóm krzywym wymiernym $C_1$ i $C_2$, których suma klas wynosi $n$.

Przypadek normalny dla $n = 2m$ jest to przypadek, w którym każda obwiednia-tworząca jest klasy $m$, i dla $n = 2m + 1$, gdzie jedna z krzywych obwiedni jest klasy $m$, a druga — klasy $m + 1$.

Tylko w przypadkach wyjątkowych może okazać się, że klasy będą odpowiednio równe $m - a$ i $m + a$, albo $m - a$ i $m + 1 + a$.

Krzywe-obwiednie są we wszystkich przypadkach wymierne i można do nich również zastosować ten sam sposób tworzenia się.

Punkt przecięcia jakikolwiek krzywej $C$ z krzywą $C_1$ (albo $C_2$) jest wogóle punktem styczności.

**14. Przestrzeń trójwymiarowa.** Te same metody stosują się do krzywych wymiernych przestrzeni trójwymiarowej, dla których spółrzędne $(x, y, z)$ punktu jakiegokolwiek wyrażają się w funkcyi wymiernej parametru $t$,

$$x = \frac{f_1(t)}{f_4(t)}, \qquad y = \frac{f_2(t)}{f_4(t)}, \qquad z = \frac{f_3(t)}{f_4(t)}.$$

Krzywa jest rzędu $n$-tego, jeżeli funkyce $f$ są rzędu $n$-tego.

Dla krzywej stopnia drugiego mamy tożsamość

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{20}$$

Krzywa jest wówczas płaska; jest to stożkowa.

Dla krzywej stopnia trzeciego mamy trzy związki

$$\left.\begin{aligned} L_1 + tM_1 = 0, \\ L_2 + tM_2 = 0, \\ L_3 + tM_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

odpowiadające dobrze znanemu tworzeniu się rzutowemu krzywej sześciennej skośnej, jako przecięcia się trzech płaszczyzn, i związek niezależny

$$L_3 + tM_3 + t^2 N_3 = 0. \tag{23}$$

Dla krzywej rzędu czwartego mamy dwa związki

$$L_1 + tM_1 = 0, \qquad L_2 + tM_2 = 0. \tag{22}$$

Eliminacya parametru $t$ wyznacza krzywą, jako przecięcie częściowe kwadryki i powierzchni sześciennej z linią podwójną, poprowadzoną na tej ostatniej, i która jest tworzącą kwadryki. [1]

---

[1]) Czytelnik zechce sam stwierdzić, co następuje:
Są dwa rodzaje krzywych wymiernych czwartego rzędu. Pierwszy ro-

**Twierdzenie.** Krzywą wymierną rzędu $n$-tego można uważać, jako utworzoną przez przecięcie płaszczyzn stycznych do trzech powierzchni rozwijalnych, których suma klas wynosi $n$:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 t^a + M_1 t^{a-1} + \ldots = 0, \\ L_2 t^b + M_2 t^{b-1} + \ldots = 0, \\ L_3 t^c + M_3 t^{c-1} + \ldots = 0, \end{array}\right\} \text{przyczem} \quad a + b + c = n.$$

Gdy $n = 3m$, klasa każdej powierzchni będzie równała się $m$; gdy $n = 3m + 1$, klasa stanowić będzie odpowiednio $m$, $m$, $m + 1$, wreszcie, jeżeli $n = 3m + 2$, klasę stanowić będzie liczba $m$, $m + 1$, $m + 1$.

**15. Przestrzeń $n$-wymiarowa.** Możemy wypowiedzieć następujące twierdzenia:

I. Krzywa wymierna rzędu $m$-tego, gdzie $m$ jest mniejsze od $n$, należy do przestrzeni, mającej najwyżej $m$ wymiarów.

II. Krzywa rzędu $n$, nie zawarta w przestrzeni o wymiarze mniejszym, jest wymierna.

Można ją uważać, jako utworzoną przez punkt wspólny równaniom:

$$L_1 + t M_1 = 0,$$
$$L_2 + t M_2 = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$L_n + t M_n = 0.$$

dzaj ma punkt wielokrotny i jest przecięciem zupełnem dwóch kwadryk, które są styczne w jednym punkcie.

Drugi rodzaj może znajdować się tylko na jednej kwadryce i nie ma punktu wielokrotnego.

Jeżeli jest punkt wielokrotny $(x, y, z)$, równania (22) muszą być zgodne względem $(x, y, z)$ dla dwóch wartości parametru $t$. Wobec tego mamy:

$$L_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad M_2 = 0,$$

i kwadryka

$$L_1 M_2 - L_2 M_1 = 0$$

jest stożkiem.

III. Jeżeli krzywa rzędu $n+1$ jest wymierna, wówczas ta krzywa może być naogół przedstawiona, przy należytym wyborze spółrzędnych jednorodnych, zapomocą równań:

$$\rho x_1 = (t - a_1)^{n+1},$$
$$\rho x_2 = (t - a_2)^{n+1},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\rho x_{n+1} = (t - a_{n+1})^{n+1}.$$

IV. Krzywa wymierna rzędu $m$-tego może być uważana, jako utworzona przez $n$ równań:

$$f_a(x_1, x_2, x_3, \ldots, t) = 0$$
$$f_b(x_1, x_2, x_3, \ldots, t) = 0$$
i t. d.

w których funkcye $f_a, f_b, \ldots$ są funkcyami liniowemi spółrzędnych rzędów $a$, $b$, $c$ względem $t$, przyczem $a + b + \ldots = m$.

---

## RÉSUMÉ.

### Sur les propriètés fondamentales des courbes rationnelles.

Plusieurs des transformations géométriques les plus usuelles, par exemple celles qui donnent les courbes inverses, les podaires, les développées, transforment les courbes rationnelles en courbes rationnelles. La ligne droite et les coniques fournissent des exemples courants de ces courbes. Il serait par conséquent intéressant d'avoir une théorie de leurs propriétés qui non seulement ne dépende pas de la théorie générale des courbes planes, mais qui au contraire soit une introduction à cette théorie. C'est le but que je me propose dans ce travail en traitant le problème par une méthode qui admet une généralisation facile aux courbes rationnelles de l'espace à trois dimensions ou à plus de trois dimensions.

Les résultats que j'obtiens sont les suivants.

**Courbes planes. 1.** La cubique rationnelle peut être considérée comme le lieu de l'intersection des rayons d'un faisceau avec les tangentes à une conique.

Ou encore:

**2.** Etant données deux séries ponctuelles et un faisceau de droites en correspondance projective, la droite joignant les points correspondants des deux séries coupe le rayon correspondant du faisceau en un point dont le lieu est une cubique rationnelle.

**3.** Une courbe rationnelle du quatrième ordre peut généralement être engendrée par l'intersection des tangentes à deux coniques qui sont en relation homographique l'une avec l'autre.

Ou encore:

**4.** Etant données quatre séries homographiques de points, la droite réunissant deux points correspondants, joignant des points des deux autres séries, en un point dont le lieu est une courbe rationnelle du quatrième ordre.

**5. Théorème général.** Une courbe rationnelle $C$ de degré $n$, peut ètre engendrée par l'intersection des tangentes correspondantes à deux courbes rationnelles $C_1$ i $C_2$ dont la somme des classes est $n$.

**Espace à trois dimensions 6. Théorème.** La courbe rationnelle du $n$-me degré peut être considérée comme engendrée par l'intersection des plans tangents à trois surfaces développables pour lesquelles la somme des classes est $n$:

$$\left.\begin{aligned} L_1 t^a + M_1 t^{a-1} + \ldots &= 0, \\ L_2 t^b + M_2 t^{b-1} + \ldots &= 0, \\ L_3 t^c + M_3 t^{c-1} + \ldots &= 0, \end{aligned}\right\} \text{ avec } a + b + c = n.$$

**Espace à $n$ dimensions. I.** Une courbe rationnelle de dégré $m$, $m$ étant inférieur à $n$, appartient à un espace ayant au plus $m$ dimensions.

**II.** Une courbe de degré $n$ qui n'est pas contenue dans un espace inférieur est nécessairement rationnelle.

**III.** Une courbe de dégré $n+1$, si elle est rationnelle, peut généralement être représentée, avec un choix convenable de coordonnées homogènes, par les équations:

$$\rho x_1 = (t - a_1)^{n+1},$$

$$\rho x_2 = (t - a_2)^{n+1},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\rho x_{n+1} = (t - a_{n+1})^{n+1}.$$

**IV.** Une courbe rationnelle du $m$-me degré peut être considérée comme engendrée par les $n$ équations

$$f_a(x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots, \quad t) = 0,$$

$$f_b(x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots, \quad t) = 0,$$

etc.

dans lesquelles les $n$ fonctions $f$ sont des fonctions linéaires des coordonnées et sont de degrés $a$, $b$, $c$, en $t$, tels que $a + b + \ldots = m$.